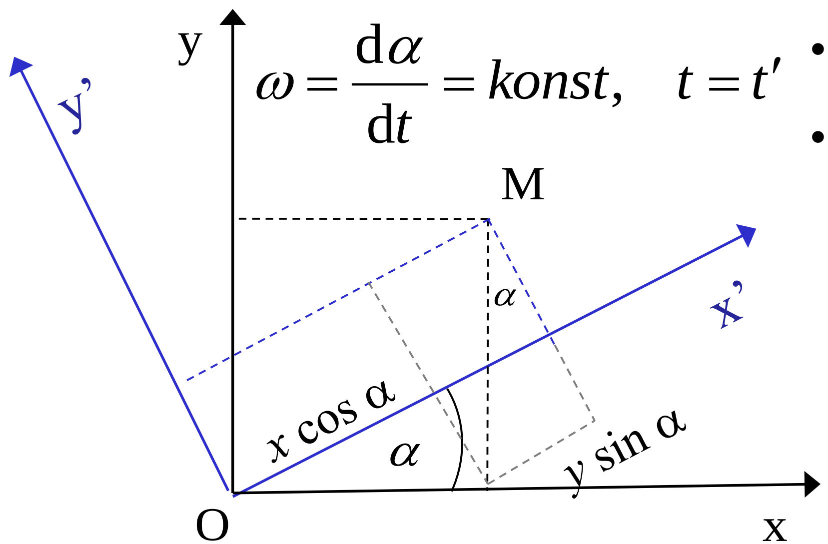
Opakování - pohyb hmotného bodu v rotující soustavě souřadné



$$\omega = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = konst, \quad t = t'$$

- kartézská soustava souřadnic: *x*, *y*, *z*
- kartézská soustava otáčející kolem osy *z*= *z'*: *x'*, *y'*, *z'*

$$x' = x\cos\omega t + y\sin\omega t$$

$$y' = -x\sin\omega t + y\cos\omega t$$

$$z' = z$$

$$\omega = -\omega'$$

$$v'_x = v_x \cos\omega t + v_y \sin\omega t - \omega' y'$$

$$v'_y = -v_x \sin\omega t + v_y \cos\omega t + \omega' x'$$

$$v'_z = v_z$$

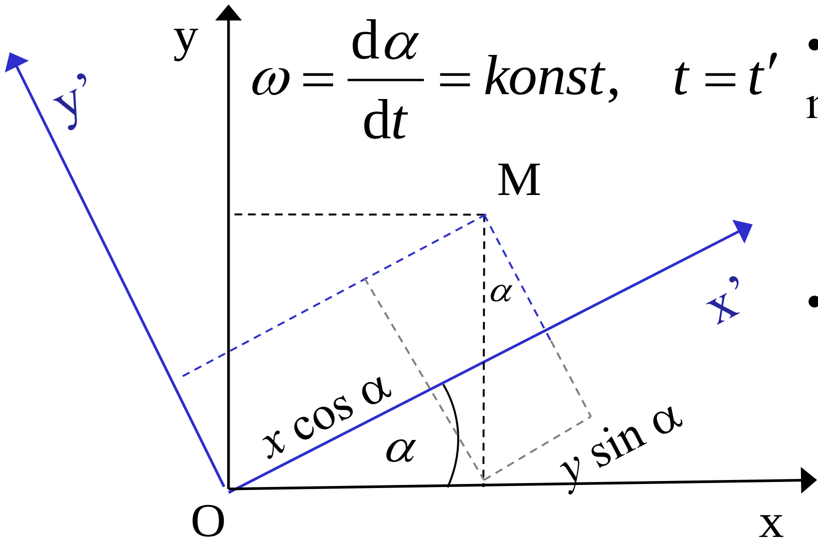
$$a'_x = a_x \cos\omega t + a_y \sin\omega t - 2\omega' v'_y + \omega'^2 x'$$

$$a'_y = -a_x \sin\omega t + a_y \cos\omega t + 2\omega' v'_x + \omega'^2 y'$$

$$a'_z = a_z$$

- složky odstředivého zrychlení: $\vec{a}_O = \left(\omega'^2 x', \omega'^2 y', 0\right)$
- složky Coriolisova zrychlení: $\vec{a}_C = \left(-2\omega' v'_y, 2\omega' v'_x, 0\right)$

Opakování - pohyb hmotného bodu v rotující soustavě souřadné



$$\omega = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = konst, \quad t = t'$$

- obecnou rotaci kolem libovolně orientované osy můžeme získat složením tří rotací kolem souřadných os.

$$\vec{\omega}' = \left(\omega'_x, \omega'_y, \omega'_z\right)$$

- Coriolisovo zrychlení při rotaci kolem obecné osy:

$$\vec{a}_C = 2\left(\vec{\omega}' \times \vec{v}'\right) = -2\left(\vec{\omega} \times \vec{v}'\right)$$

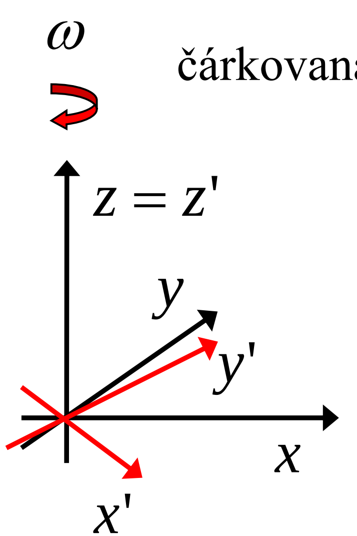
- Coriolisovo zrychlení je tedy kolmé jak na vektor úhlové rychlosti $\vec{\omega}'$ (směr rotační osy), tak na rychlost hmotného bodu $\vec{v}'$ v rotující soustavě souřadné.

- Odstředivé zrychlení zrychlení při rotaci kolem obecné osy: $\vec{a}_O = -\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}'\right)$

- Velikost odstředivého zrychlení: $a_O = \omega^2 r \sin\alpha = \omega^2 r_K$

  r_K je vzdálenost bodu od osy rotace

Síly působící v rovnoměrně rotující soustavě souředné



čárkovaná vztažná soustava se otáčí s konstantní úhlovou rychlostí ω

- v čase $t = 0$ oba souřadné systémy splývají

$$\alpha(t) = \omega t$$

rotace kolem obecné osy:

odstředivé zrychlení: $\vec{a}_0 = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

odstředivá síla: $\vec{F}_0 = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

Coriolisovo zrychlení: $\vec{a}_C = -2\vec{\omega} \times \vec{v}'$

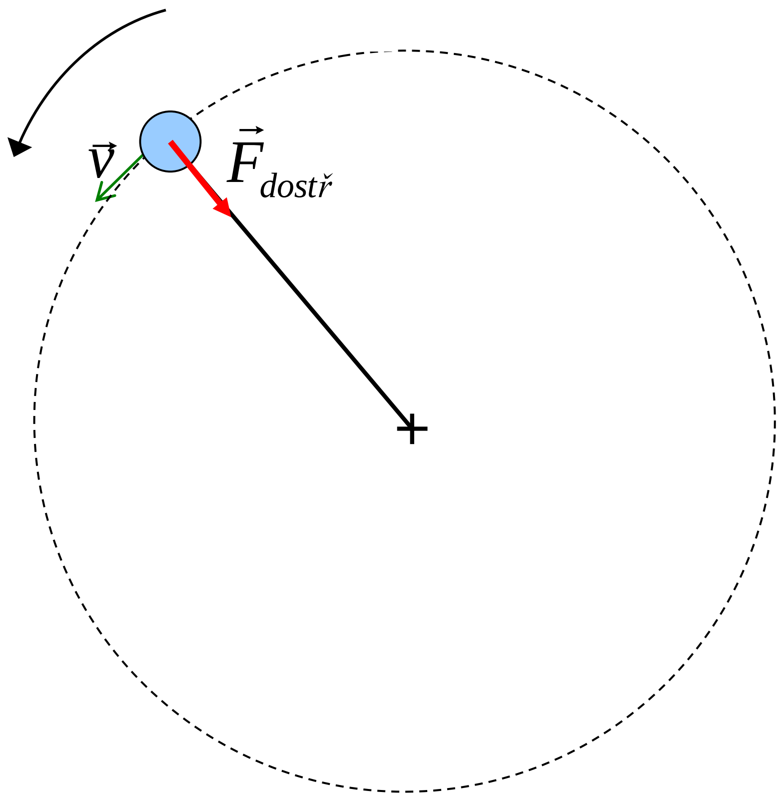
Coriolisova síla: $\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$

Odstředivá síla

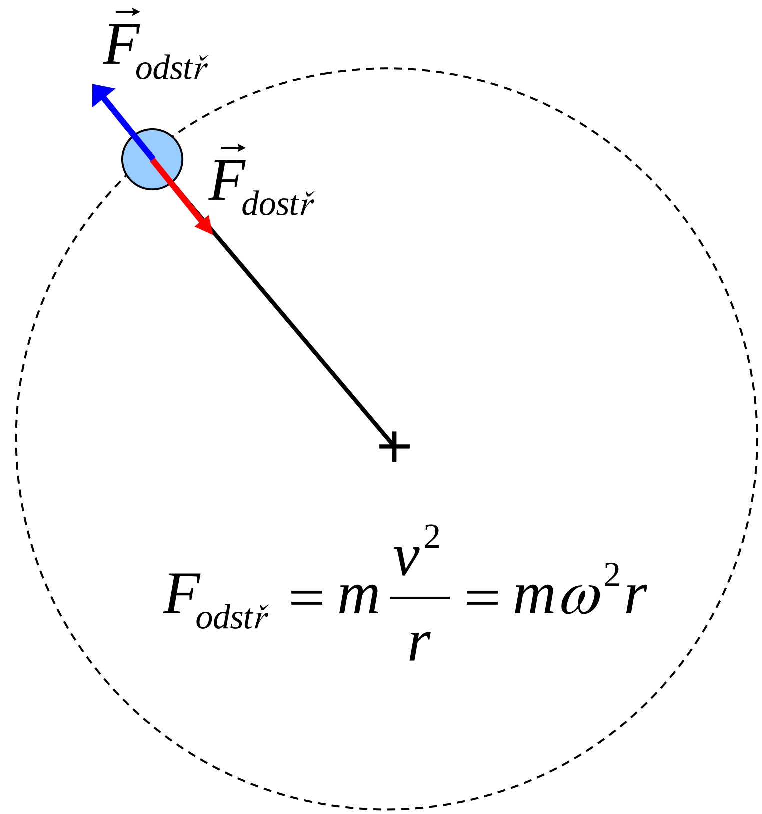
kulička na provázku

$$\vec{F}_{odstř} = -m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)$$

pohled z inerciální soustavy



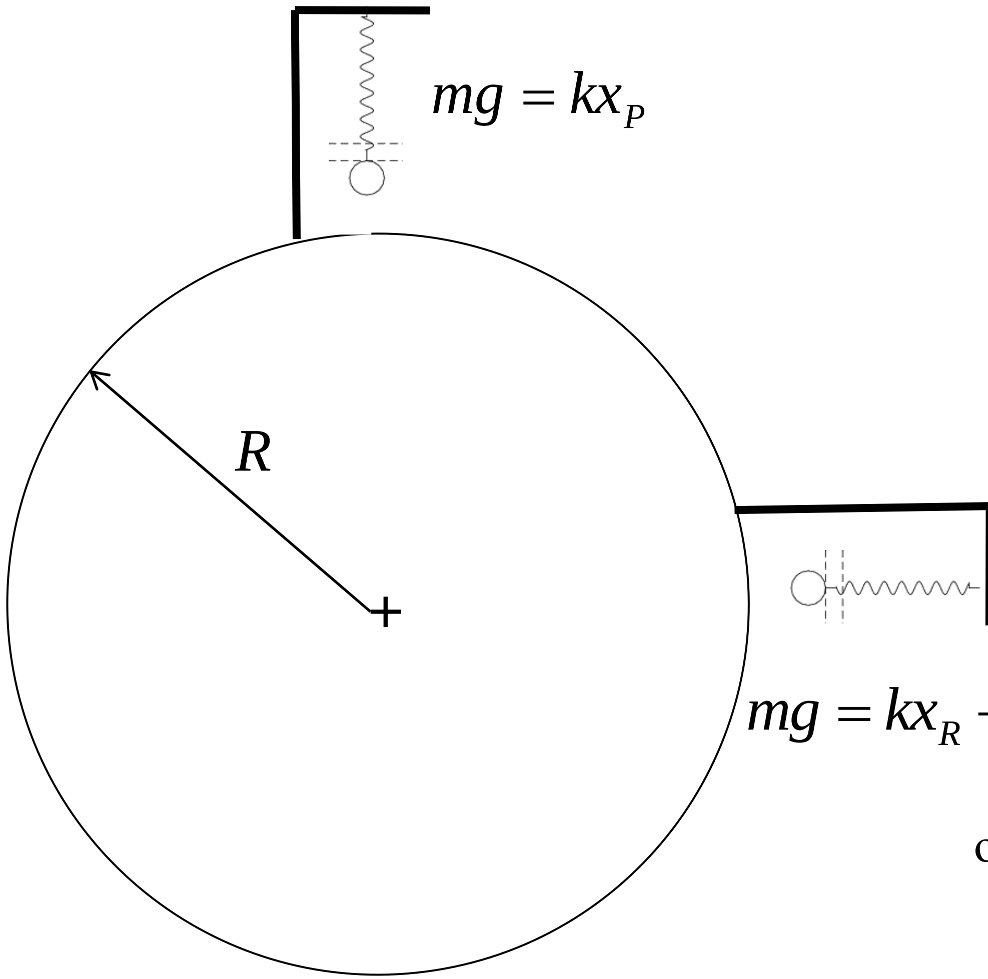
pohled z neinerciální rotující soustavy



$$F_{odstř} = m\frac{v^2}{r} = m\omega^2 r$$

Odstředivá síla - příklad

vážení na pólu a na rovníku



$$mg = kx_P$$

$$mg = kx_R + \underbrace{m\omega^2 R}_{\text{odstředivá síla}}$$

v neinerciální soustavě

$$\frac{x_P - x_R}{x_P} = \frac{\omega^2 R}{g}$$

pro Zemi:

$$\omega = \frac{2\pi R}{T} = 7.3\times10^{-5}\ \mathrm{s}^{-1}$$

$$R = 6378\ \mathrm{km}$$

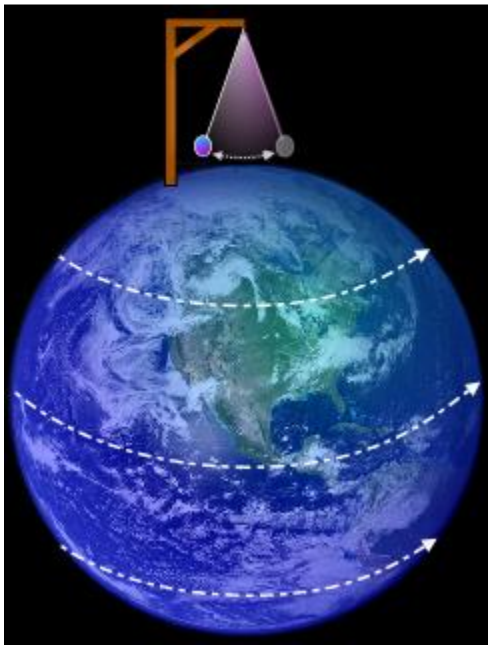
$$T = 24\ \mathrm{hod} = 24\cdot 60\cdot 60\ \mathrm{s}$$

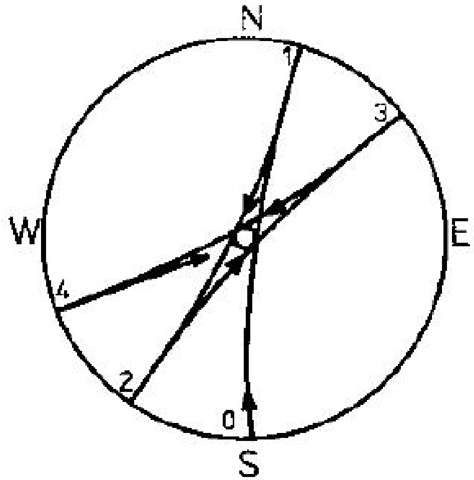
$$\frac{x_P - x_R}{x_P} \approx 0.4\ \%$$

Coriolisova síla - Foucaltovo kyvadlo

$$\vec{F}_C = -2m\vec{\omega}\times\vec{v}'$$

$$F_C = 2m\omega v' \sin\alpha$$





na pólu:

$$360^o / \mathrm{den} = 0.25^0 \min^{-1}$$

na rovnoběžce za zeměpisnou šířkou ψ: $360^o \sin\psi / \mathrm{den}$

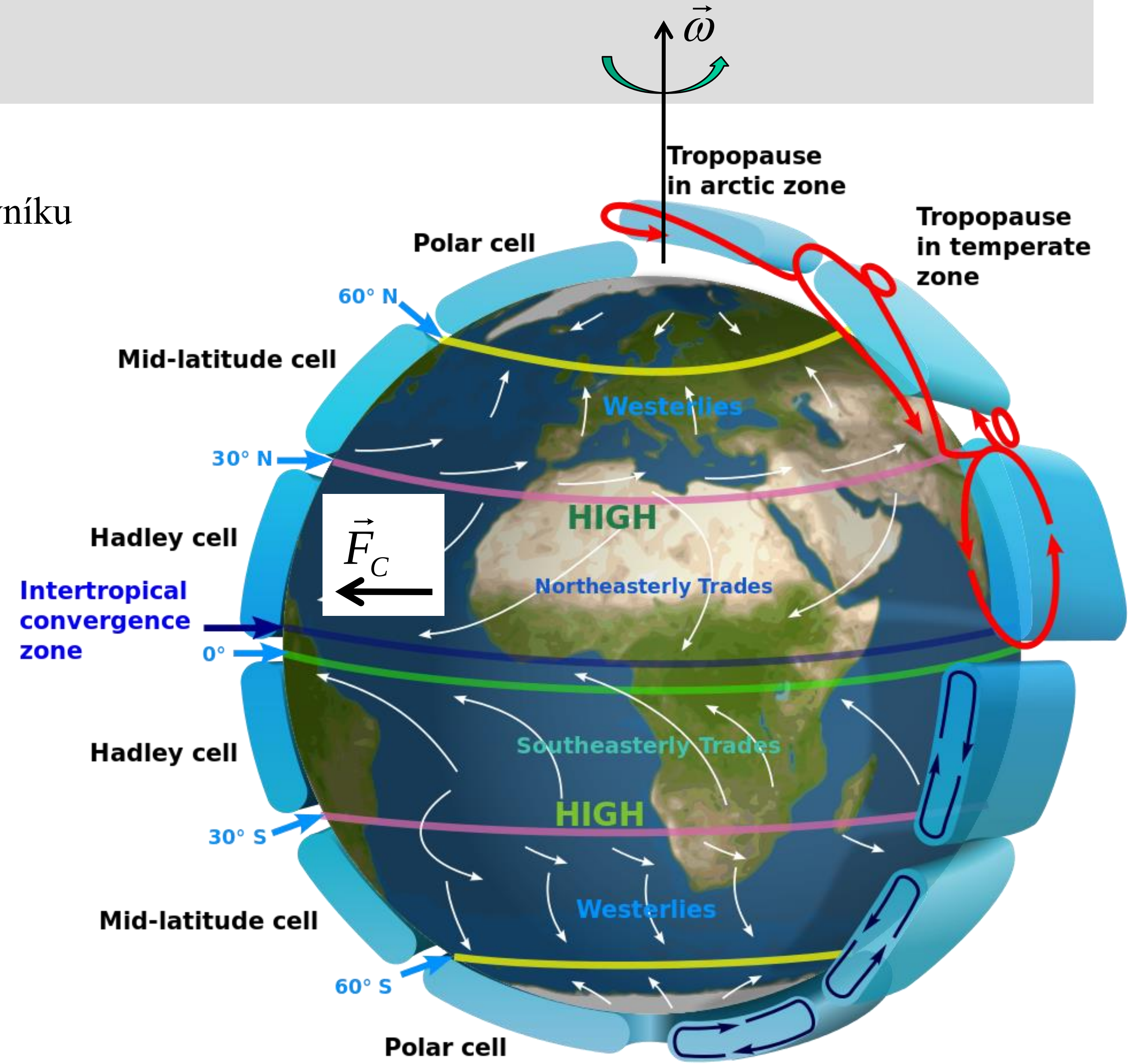
v Praze $\psi = 50.08^o$ $\longrightarrow$ $0.19^0 \min^{-1}$

posun za 1 h: 11.5^o

Coriolisova síla

• pasáty vanoucí směrem k rovníku

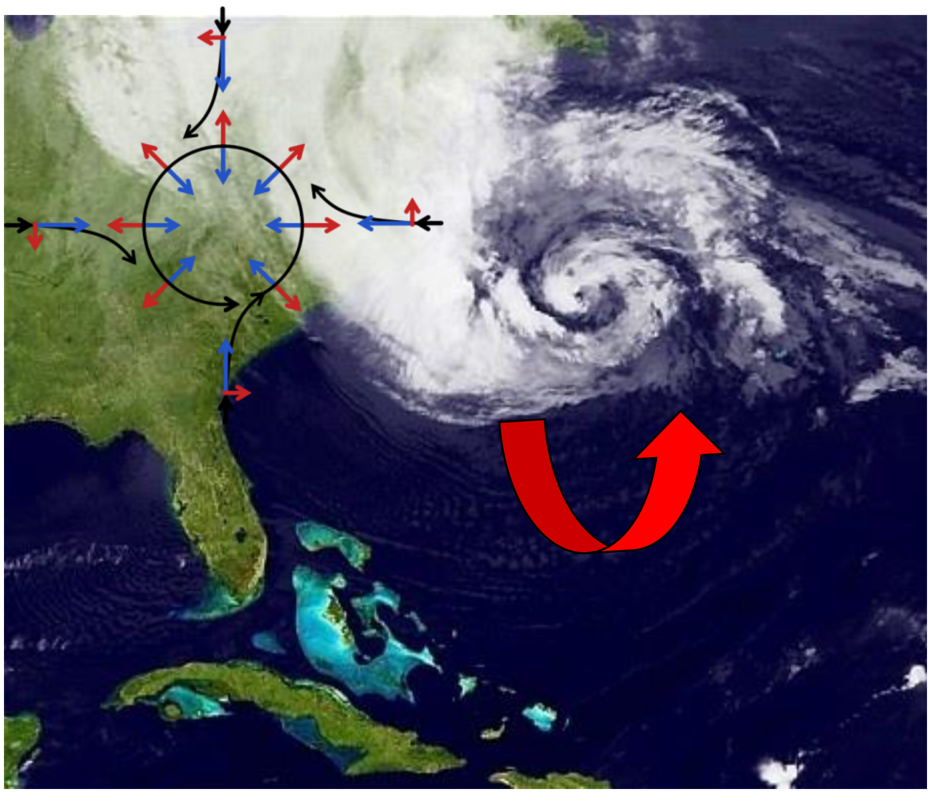
$$\vec{F}_C = -2m\vec{\omega}\times\vec{v}'$$



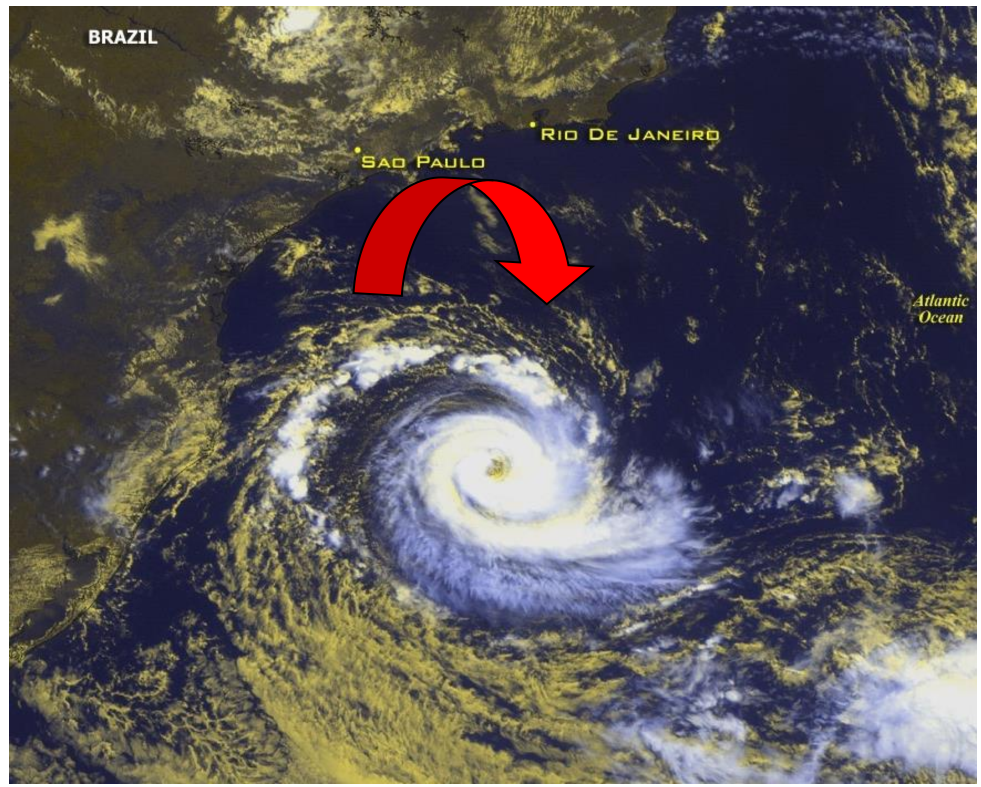
Coriolisova síla

$$\vec{F}_C = -2m\vec{\omega}\times\vec{v}'$$

hurikán Sandy v severním altantiku 25.10. 2012

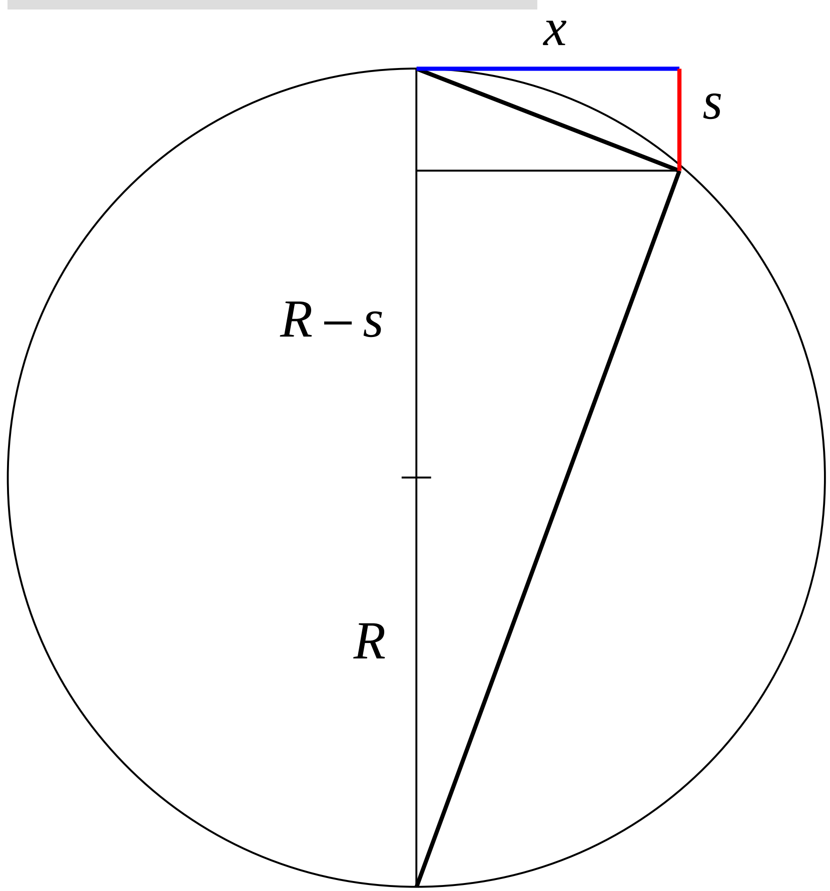


tropická bouře v jižním altantiku 26.3. 2004



Opakování - Gravitační zákon

$$F = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2}$$



$$\frac{x}{s} = \frac{2R-s}{x} \Rightarrow x^2 = 2Rs - s^2$$

$$x = \sqrt{2Rs}$$

$$R = 6378\ \mathrm{km}$$

$$s = \frac{1}{2} g t^2 = 4.9\ \mathrm{m}$$

$$v = 7.9\ \mathrm{km/s}$$

1. kosmická rychlost

Opakování - souvislost potenciálu a intenzity pole

těleso o hmotnosti *m*:

potenciál: $\varphi(\vec{r}) = \varphi(x, y, z)$

potenciální energie : $W_p(\vec{r}) = E_p(\vec{r}) = m\varphi(\vec{r})$

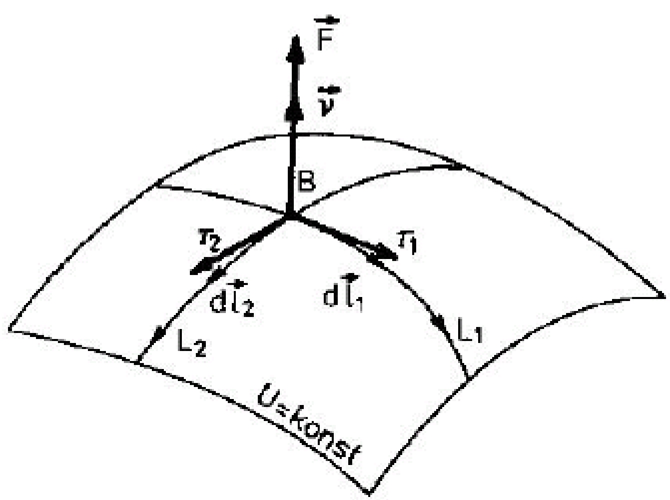
intenzita: $\vec{I}(\vec{r}) = \vec{I}(x, y, z)$

síla: $\vec{F}(\vec{r}) = m\vec{I}(\vec{r})$

$$\varphi(x, y, z) = konst.$$

gradient

$$\vec{I} = \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x}, -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, -\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) \equiv -grad\,\varphi \equiv -\nabla \varphi$$

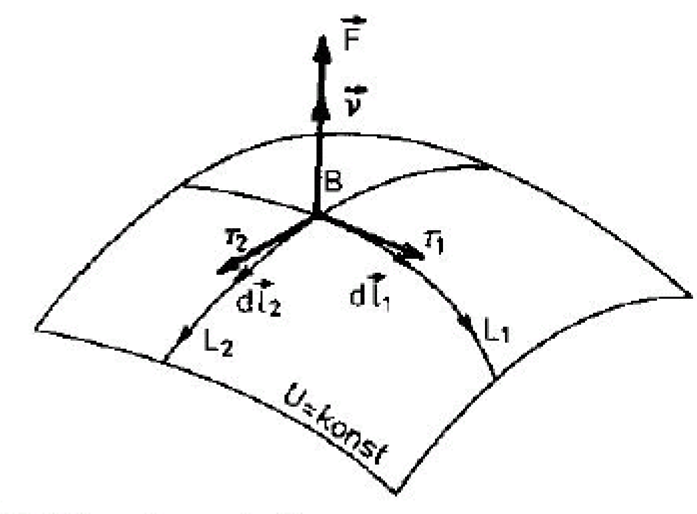


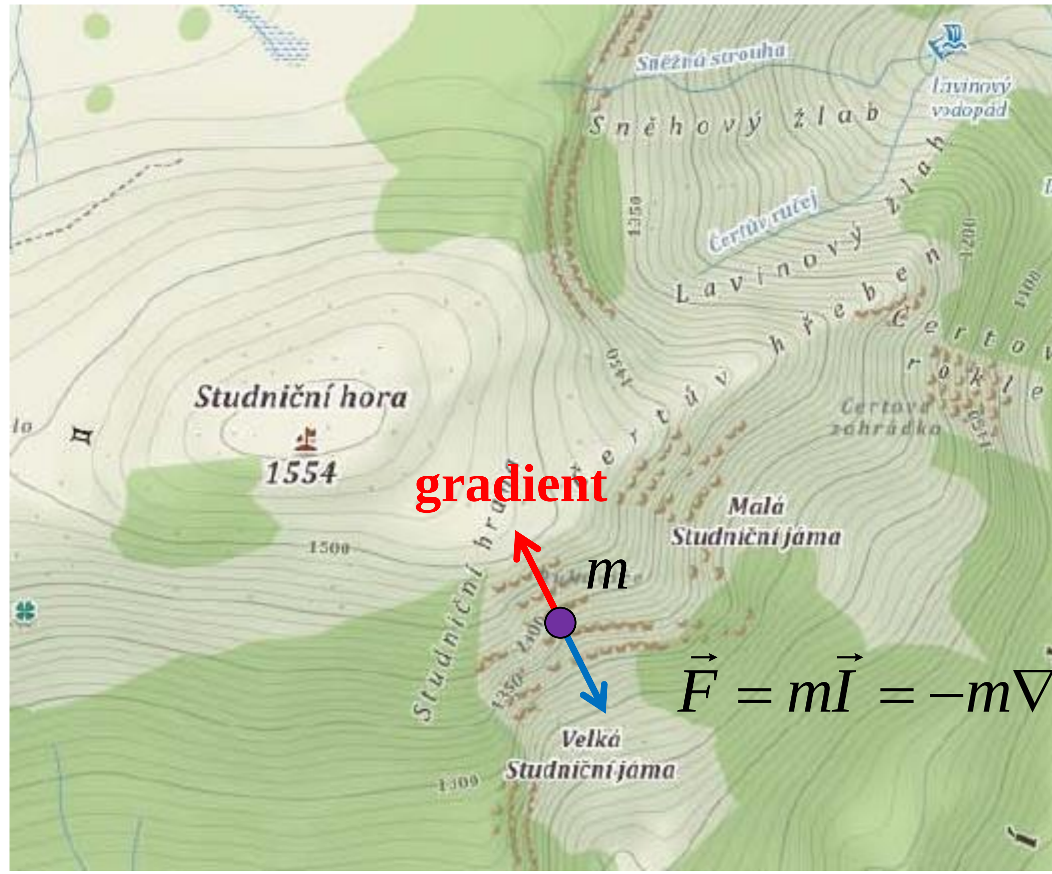
$$\vec{F} = \left(-\frac{\partial E_p}{\partial x}, -\frac{\partial E_p}{\partial y}, -\frac{\partial E_p}{\partial z}\right) \equiv -\nabla E_p$$

Opakování - souvislost potenciálu a intenzity pole

$$\vec{I} = \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x}, -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = -\nabla \varphi \qquad \vec{F} = \left(-\frac{\partial E_p}{\partial x}, -\frac{\partial E_p}{\partial y}, -\frac{\partial E_p}{\partial z} \right) = -\nabla E_p$$

$$\varphi(x, y, z) = konst.$$





Opakování - souvislost potenciálu a intenzity pole

Př. gravitační pole:

$$\varphi = -\kappa \frac{M}{r} = -\kappa \frac{M}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

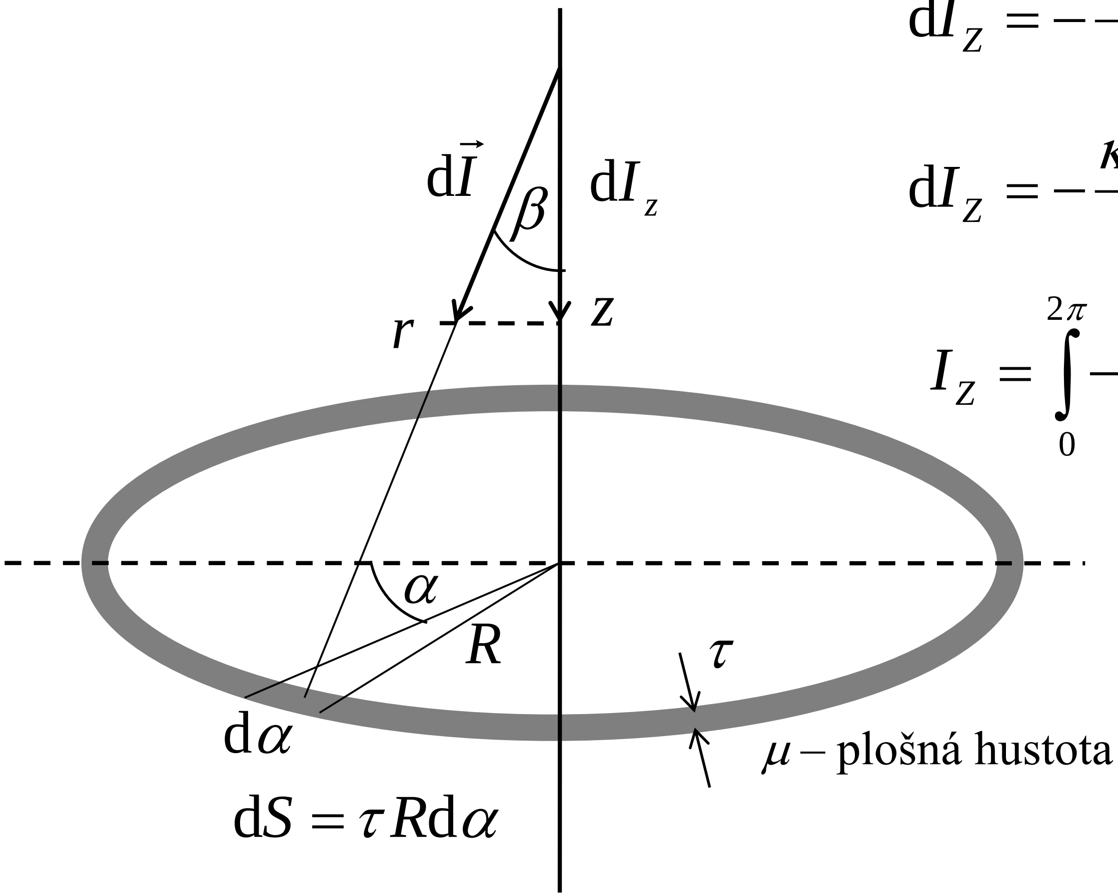
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\kappa M \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} = -\kappa M \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\kappa M \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) 2x}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\nabla \varphi = \left(\kappa \frac{M\, x}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \kappa \frac{M\, y}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \kappa \frac{M\, z}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right) = \kappa \frac{M\, \vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{I} = -\nabla \varphi = -\kappa \frac{M\, \vec{r}}{r^3}$$

Výpočet intenzity gravitačního pole

• **gravitační pole v ose prstence**



$$\mathrm{d}m = \mu \mathrm{d}S = \mu\tau R \mathrm{d}\alpha$$

$$\mathrm{d}I_Z = -\frac{\kappa\, \mathrm{d}m \cos\beta}{r^2} \qquad \cos\beta = \frac{z}{r}$$

$$\mathrm{d}I_Z = -\frac{\kappa\,\tau\,\mu\,R\,z\,\mathrm{d}\alpha}{r^3} = -\frac{\kappa\,\tau\,\mu\,R\,z\,\mathrm{d}\alpha}{\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}}$$

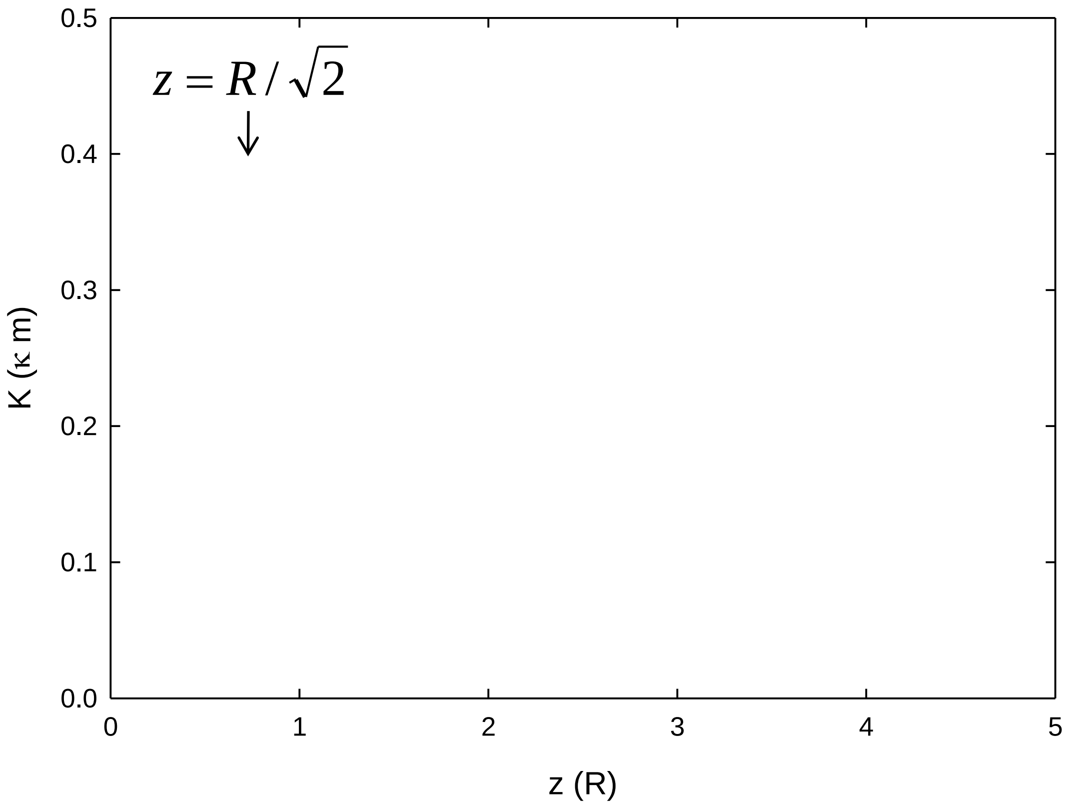
$$I_Z = \int_0^{2\pi} -\frac{\kappa\,\tau\,\mu\,R\,z\,\mathrm{d}\alpha}{\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}} = -\frac{\kappa\,\tau\,\mu\,R\,z\,2\pi}{\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}}$$

$$\boxed{I_Z = -\frac{\kappa\, m\, z}{\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}}}$$

Výpočet intenzity gravitačního pole

• **gravitační pole v ose prstence**

velikost intenzity gravitačního pole



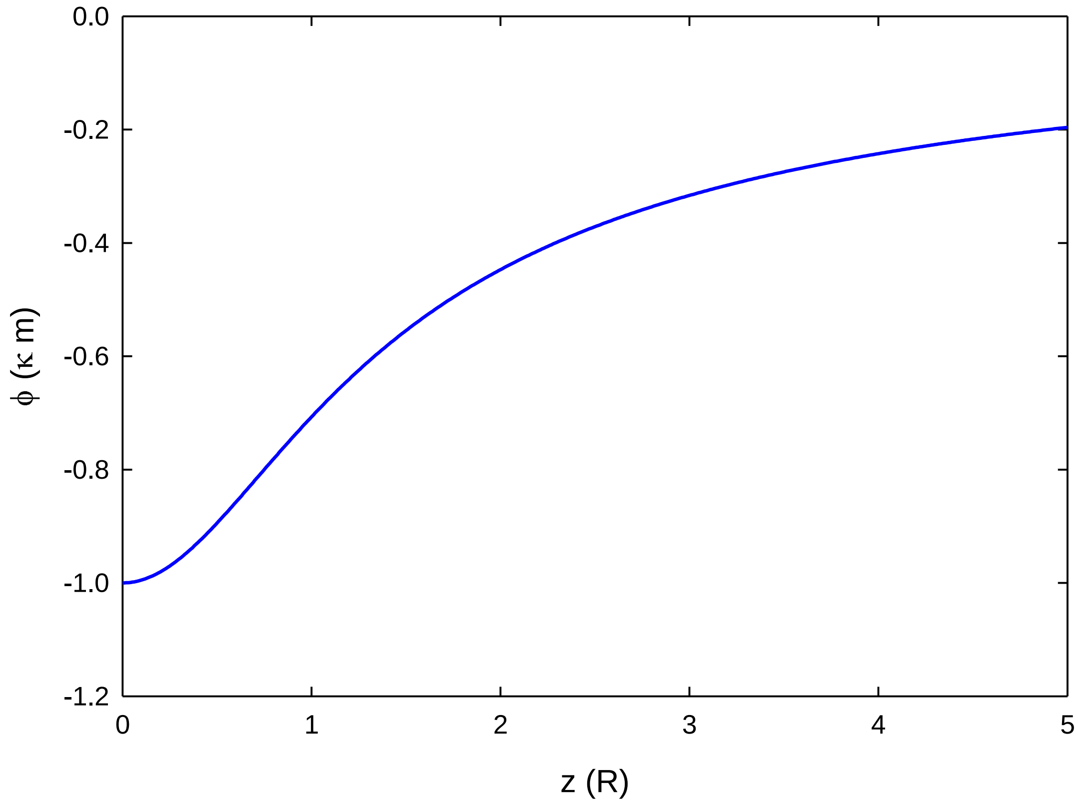
$$I_Z = \frac{\kappa m z}{\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}}$$

I_Z je maximální v $z = R/\sqrt{2}$

Výpočet intenzity gravitačního pole

• **gravitační pole v ose prstence**

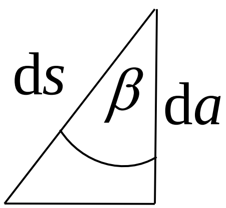
potenciál

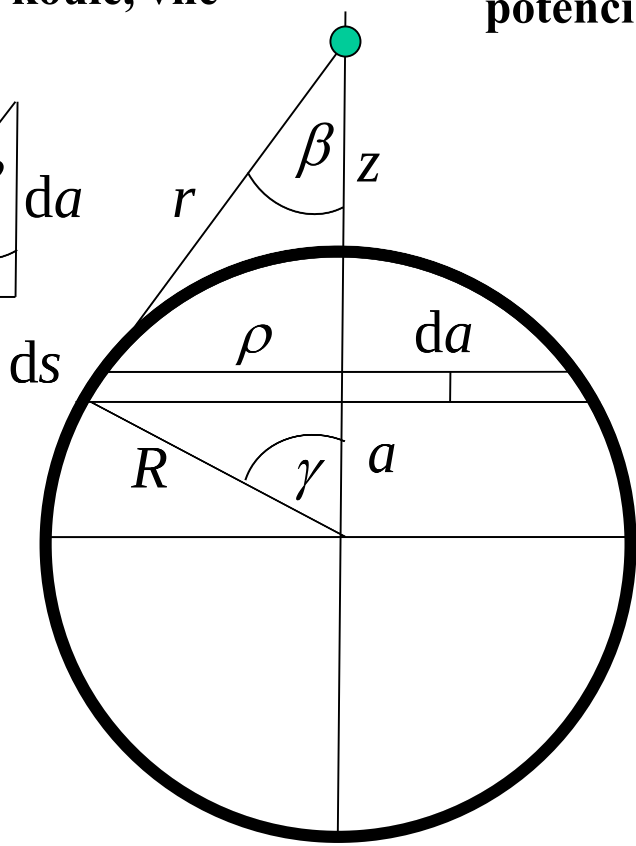


$$\varphi_Z = -\frac{\kappa\, m}{\left(z^2 + R^2\right)^{1/2}}$$

Výpočet potenciálu gravitačního pole

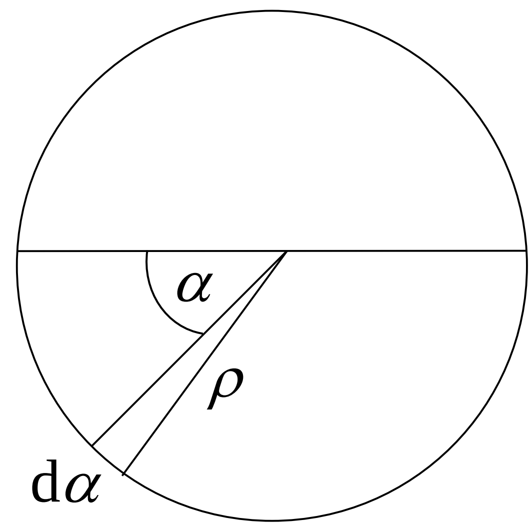
• **dutá koule, vně**





potenciál: $$\mathrm{d}\varphi = -\frac{\kappa\,\mathrm{d}m}{r} \qquad \mathrm{d}m = \rho\,\mu\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}s$$

$$\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}a}{\sin\gamma} = R\frac{\mathrm{d}a}{\rho} \qquad \mathrm{d}m = \mu\,R\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}a$$



$$\mathrm{d}\varphi = -\frac{\kappa\,\mu\,R\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}a}{r}$$

$$\varphi = \int_0^{2\pi}\int_{z+R}^{z-R}\frac{\kappa\,\mu\,R\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}r}{z}$$

$$r^2 = (z-a)^2 + \rho^2 = z^2 - 2za + R^2$$

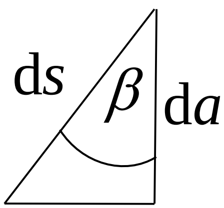
$$r\mathrm{d}r = -z\mathrm{d}a$$

potenciál vně koule: $$\varphi = -\frac{\kappa\,\mu\,4\pi\,R^2}{z} = -\frac{\kappa\,m}{z}$$

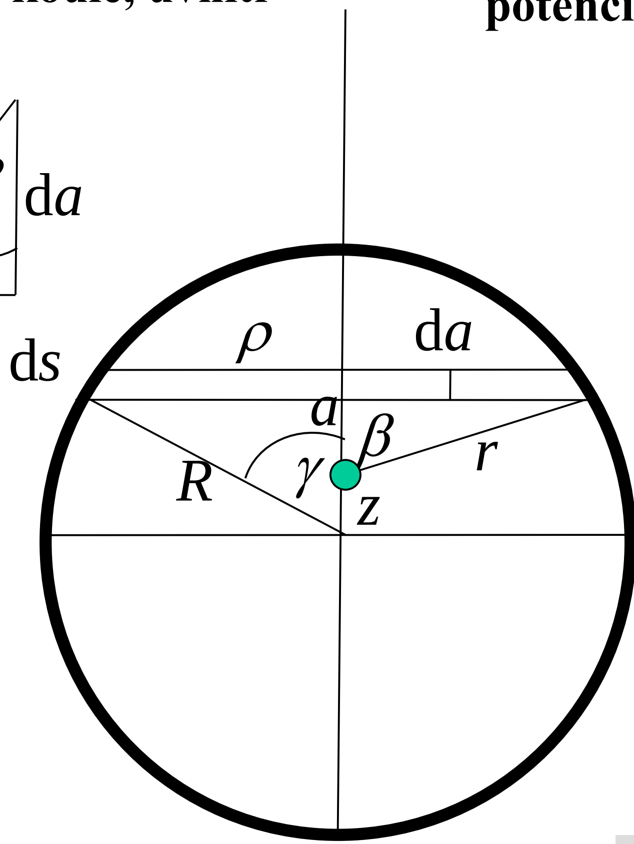
Výpočet potenciálu gravitačního pole

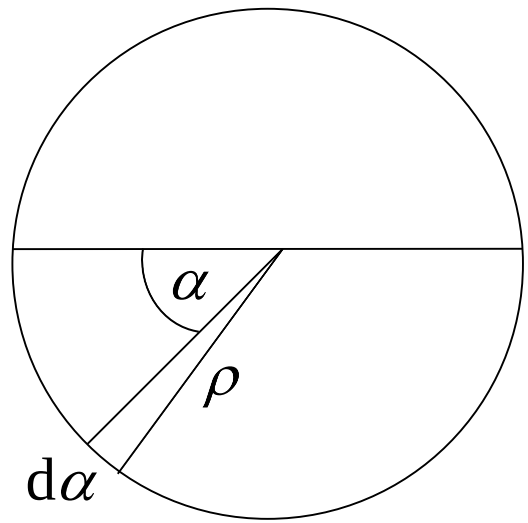
• **dutá koule, uvnitř**

potenciál: $$\mathrm{d}\varphi = -\frac{\kappa\,\mathrm{d}m}{r} \qquad \mathrm{d}m = \rho\,\mu\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}s$$



$$\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}a}{\sin\gamma} = R\frac{\mathrm{d}a}{\rho} \qquad \mathrm{d}m = \mu\,R\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}a$$





$$\mathrm{d}\varphi = -\frac{\kappa\,\mu\,R\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}a}{r}$$

$$\varphi = \int_0^{2\pi}\int_{z+R}^{R-z} \frac{\kappa\,\mu\,R\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}r}{z}$$

$$r^2 = (z-a)^2 + \rho^2 = z^2 - 2za + R^2$$

$$r\mathrm{d}r = -z\mathrm{d}a$$

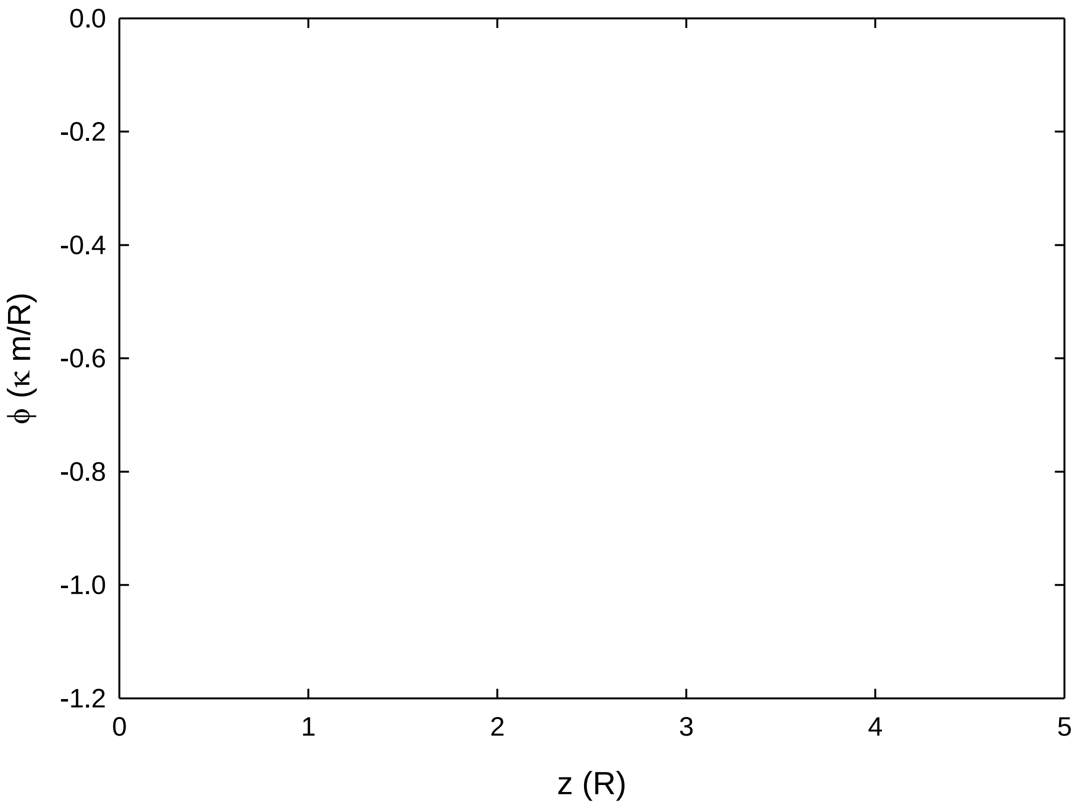
potenciál uvnitř koule: $\varphi = -\kappa\,\mu\,4\pi\,R = \dfrac{-\kappa\,m}{R} = \mathrm{konst}$

Výpočet potenciálu gravitačního pole

• **dutá koule**

potenciál: uvnitř koule ($z < R$): $$\varphi_Z = -\frac{\kappa m}{R} = \text{konst}$$

vně koule ($z \geq R$): $$\varphi_Z = -\frac{\kappa m}{z}$$



Výpočet potenciálu gravitačního pole

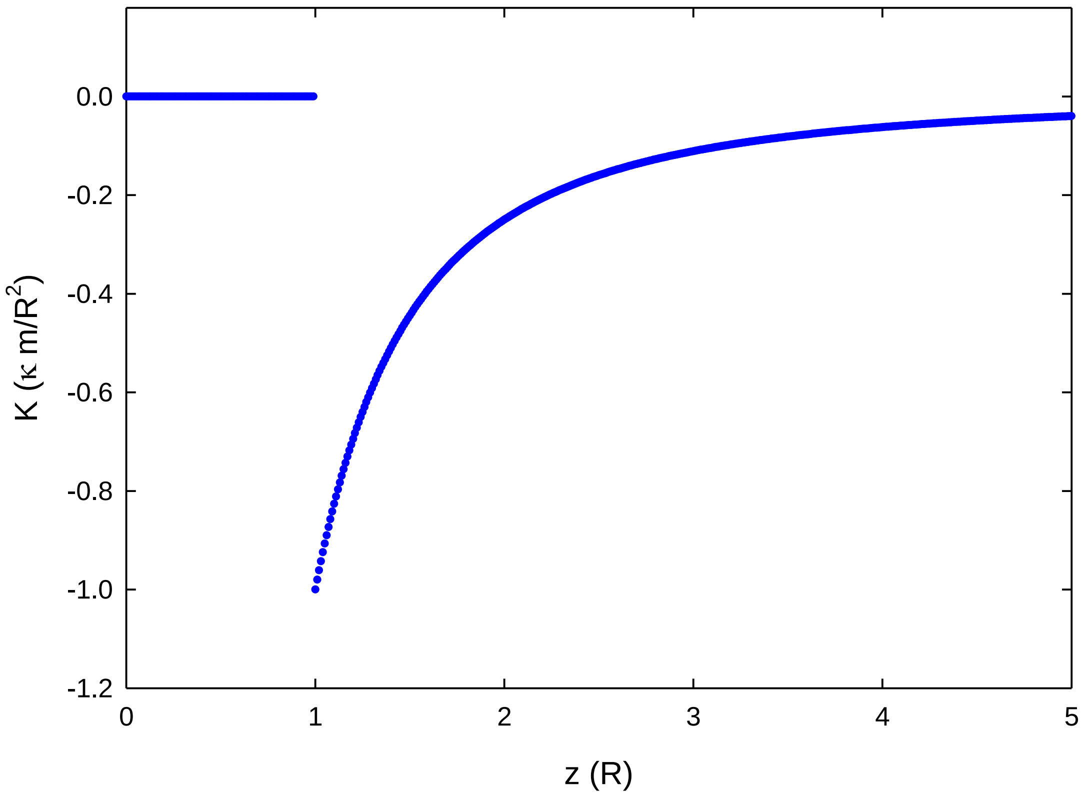
- **dutá koule**

intenzita:

$$\vec{I} = -\nabla \varphi$$

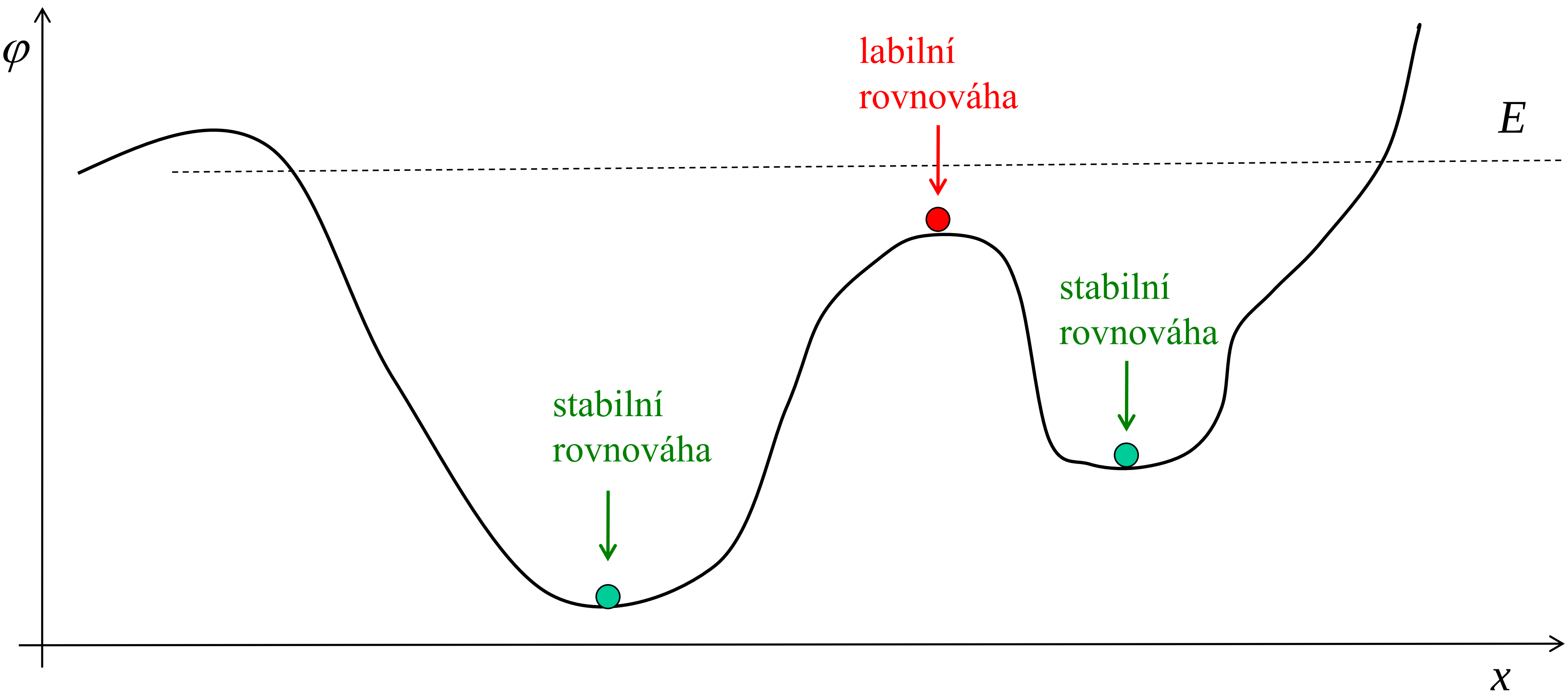
uvnitř koule ($z < R$): $$I_Z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \Rightarrow \vec{F} = m\vec{I} = 0$$

vně koule ($z \geq R$): $$I_Z = \kappa\, m \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{\kappa\, m}{z^2}$$



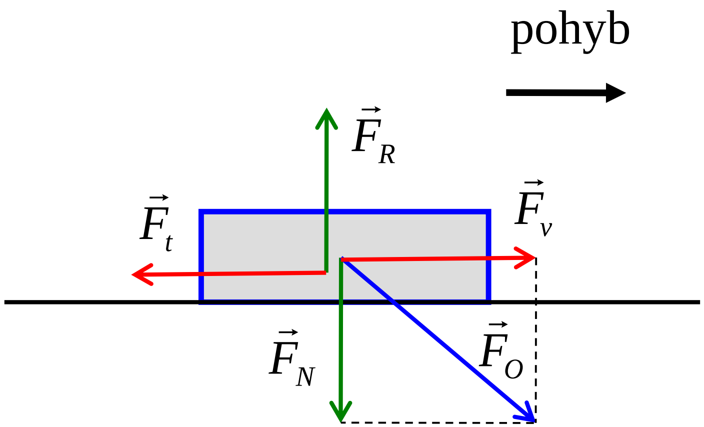
Potenciál pole

celková energie: $E = E_K + E_p$



Tření

- **smykové tření**



$$\vec{F}_t = -\mu F_N \vec{e}_v$$

μ – koeficient smykového tření

$\vec{e}_v = \dfrac{\vec{F}_v}{F_v}$ – jednotkový vektor ve směru síly F_v

$$\vec{F} = \vec{F}_v + \vec{F}_N + \vec{F}_t + \vec{F}_R$$

- pokud je F_v menší než kritická hodnota:

$$F_v < F_{vk} \longrightarrow \vec{F}_t = -\vec{F}_v \quad \text{(těleso se nepohybuje)}$$

- pokud je F_v překročí kritickou hodnotu:

$$F_v > F_{vk} \longrightarrow F_t < F_v \quad \text{(těleso se začne pohybovat)}$$

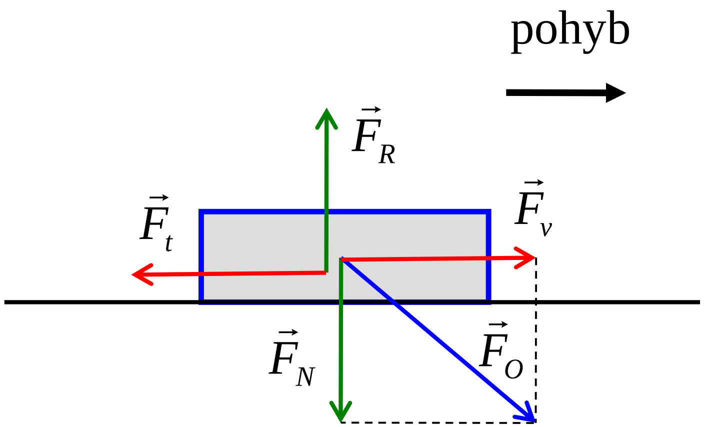
- μ_s – koeficient statického tření
- μ_k – koeficient kinematického tření

$$\mu_s \geq \mu_k$$

- typické hodnoty μ_s = 0.3 – 0.6

Tření

- **smykové tření**



$$\vec{F}_t = -\mu F_N \vec{e}_v$$

μ – koeficient smykového tření

$\vec{e}_v = \dfrac{\vec{F}_v}{F_v}$ – jednotkový vektor ve směru síly F_v

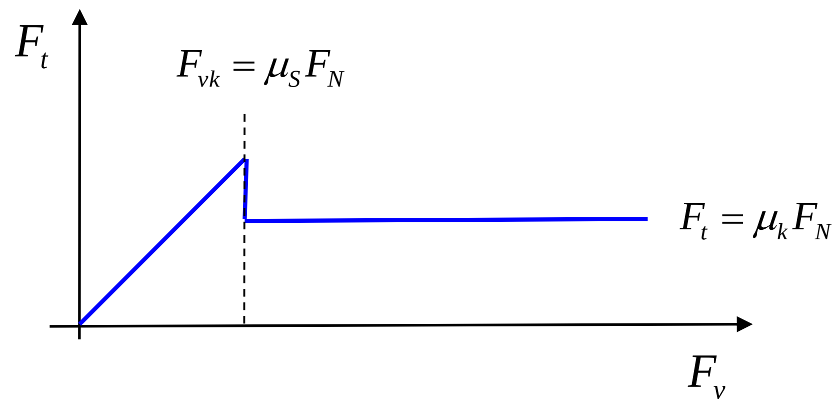
$$\vec{F} = \vec{F}_v + \vec{F}_N + \vec{F}_t + \vec{F}_R$$

- pokud je F_v menší než kritická hodnota:

$$F_v < F_{vk} \longrightarrow \vec{F}_t = -\vec{F}_v \quad \text{(těleso se nepohybuje)}$$

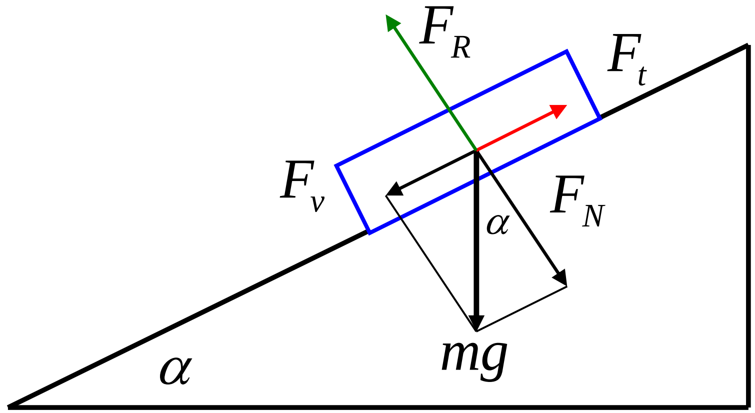
- pokud je F_v překročí kritickou hodnotu:

$$F_v > F_{vk} \longrightarrow F_t < F_v \quad \text{(těleso se bude pohybovat)}$$



Tření

- **určení statického koeficientu smykového tření**



$$F_t = \mu_s F_N = \mu_s mg\cos\alpha$$

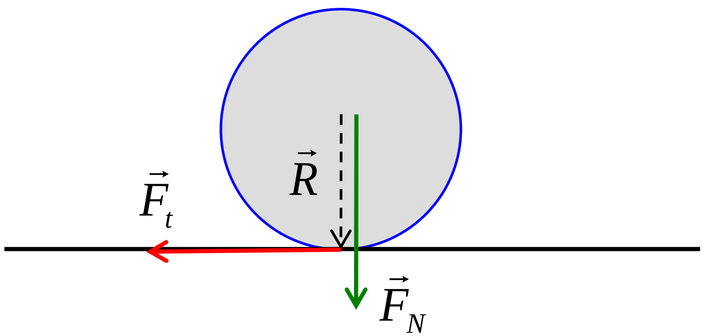
$$F_t = mg\sin\alpha$$

$$\boxed{\mu_s = \mathrm{tg}\,\alpha}$$

Tření

- **valivé tření**

μ_V – koeficient valivého tření



$$\mu_V \equiv \frac{\left|\vec{R} \times \vec{F}_t\right|}{\left|\vec{F}_N\right|} = \frac{R F_t \sin\alpha}{F_N}$$

$$F_t = \mu_V \frac{F_N}{R}$$

Konzervativní pole

- **konzervativní pole**

$$\oint \vec{F} d\vec{r} = 0$$

práce nezávisí na tvaru dráhy $\longrightarrow$ můžeme zavést potenciál a potenciální energii

zachovává se mechanická energie $E_k + E_p = \mathrm{konst}$

konzervativní jsou všechna homogenní pole $\left(\vec{F} = \mathrm{konst}\right)$ a pole centrálních sil $\left(\vec{F} = f(r)\dfrac{\vec{r}}{r}\right)$

- **nekonzervativní pole**

$$\oint \vec{F} d\vec{r} < 0$$

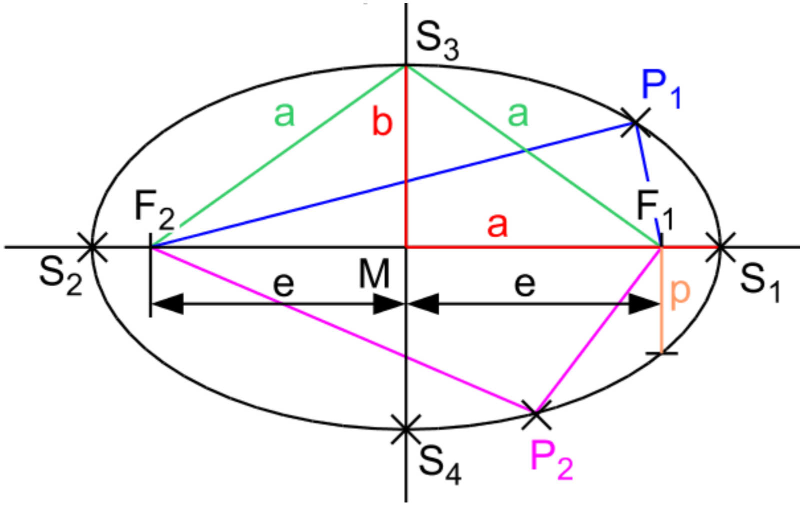
práce závisí na tvaru dráhy

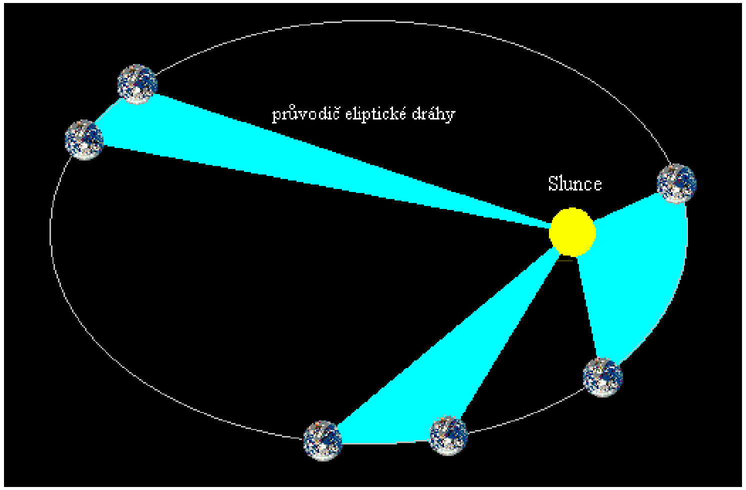
kinetická energie pohybujícího se tělesa se snižuje

Opakování - Keplerovy zákony

1. Planety se pohybují okolo Slunce po elipsách, v jejichž jednom ohnisku je Slunce

2. Plochy opsané průvodičem planety (spojnicí planety a Slunce) za stejný čas jsou stejné

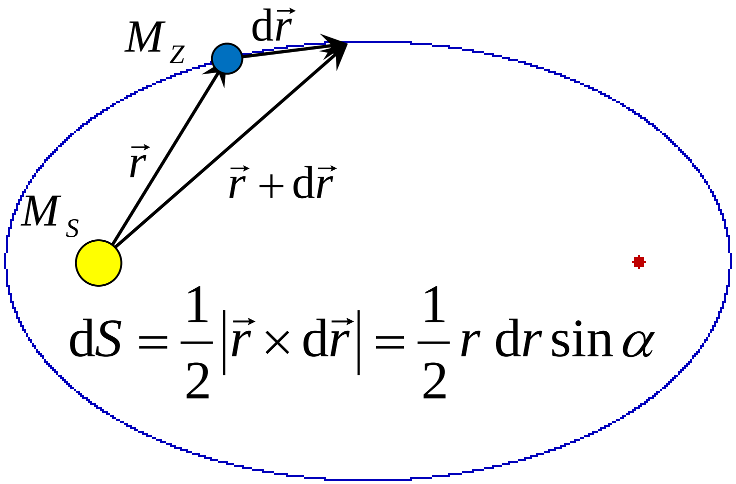




3. Poměr druhých mocnin oběžných dob je roven poměru třetích mocnin hlavní poloosy

$$T \propto a^{\frac{3}{2}}$$

Opakování - 2. Keplerův zákon



$$\mathrm{d}S = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \mathrm{d}\vec{r}\right| = \frac{1}{2} r\, \mathrm{d}r \sin\alpha$$

$$M_S \rangle\rangle M_Z, \quad \vec{F} = -\kappa \frac{M_Z M_S}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

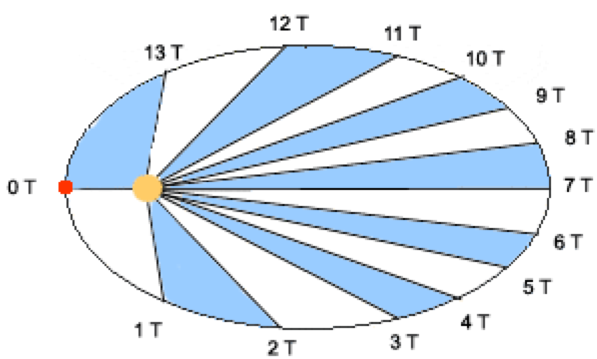
$$\vec{M} \equiv \left[\vec{r} \times \vec{F}\right] = \vec{r} \times \frac{-\kappa M_Z M_S}{r^3} \vec{r} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t} = \vec{M} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{b} = \vec{b}_0 = konst.$$

$$\left|\vec{b}_0\right| = \left|\vec{r} \times M_Z \vec{v}\right| = r M_Z v \sin\alpha = konst.$$

plošná rychlost:

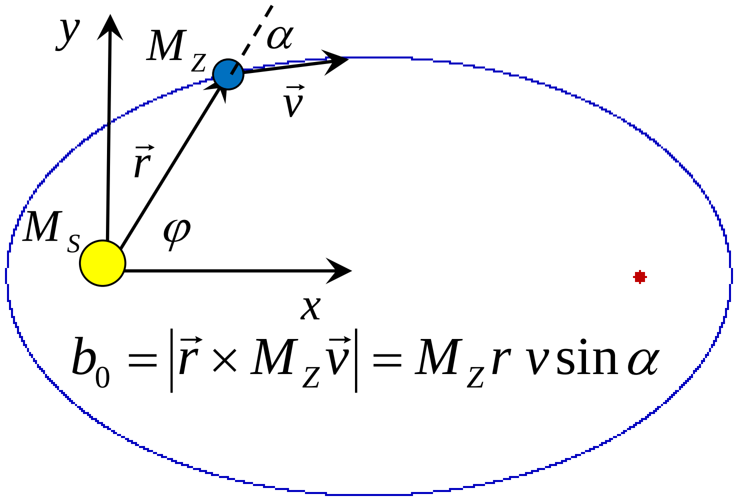
$$v_P = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} r v \sin\alpha$$



Vektor momentu hybnosti je kolmý na rovinu danou polohovým vektorem a směrem rychlosti =>
=> pohyb v centrálním gravitačním poli je rovinný

$$v_P = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} r v \sin\alpha = \frac{b_0}{2M_Z} = konst.$$

1. Keplerův zákon



$$x = r\cos\varphi \Rightarrow v_x = \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi$$

$$y = r\sin\varphi \Rightarrow v_y = \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos(\varphi - k)}$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2E_0 b_0^2}{\gamma^2 M_Z} + 1}, \quad p = \frac{b_0^2}{\gamma M_Z}, \quad \gamma = \kappa M_Z M_S$$

$$E_0 = E_k + E_p = \frac{1}{2} M_Z v^2 - \kappa \frac{M_Z M_S}{r} = konst.$$

$$E_0 \begin{cases} < 0 & \text{pohyb po elipse} \\ = 0 & \text{pohyb po parabole} \\ > 0 & \text{pohyb po hyperbole} \end{cases}$$

$$E_0 = \frac{1}{2} M_Z v^2 - \kappa \frac{M_Z M_S}{r} = 0$$

$$\Rightarrow v_{III} = \sqrt{\frac{2\kappa M_S}{r}} = 42{,}1\ \mathrm{km/s}$$

3. kosmická rychlost

Kosmické rychlosti

I. kosmická rychlost: $v_I = \sqrt{\frac{\kappa M_Z}{R_Z}} = \sqrt{gR_Z} = 7.9\,\mathrm{km\,s^{-1}}$

rychlost potřebná k vynesení na oběžnou dráhu Země

II. kosmická rychlost: $v_{II} = \sqrt{\frac{2\kappa M_Z}{R_Z}} = \sqrt{2gR_Z} = 11.2\,\mathrm{km\,s^{-1}}$

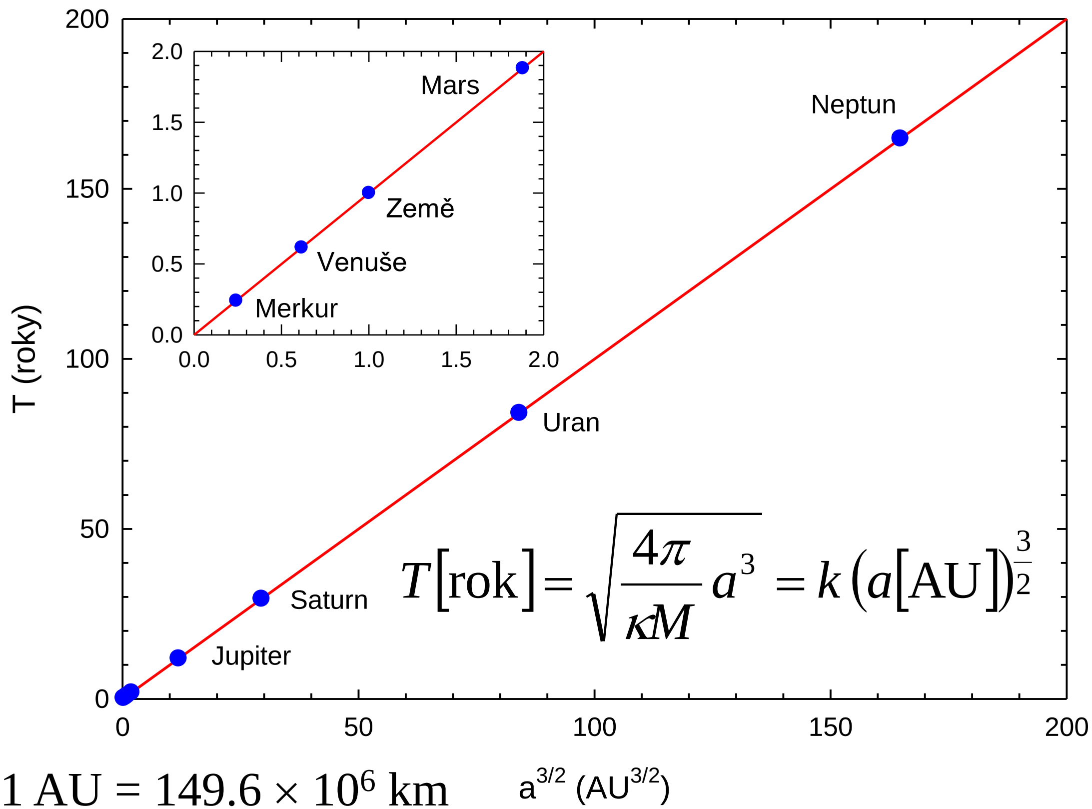
rychlost potřebná k opuštění gravitačního pole Země

III. kosmická rychlost: $v_{III} = \sqrt{\frac{2\kappa M_S}{R_{ZS}}} = 42.1\,\mathrm{km\,s^{-1}}$

rychlost potřebná k opuštění gravitačního pole Slunce, tj. k opuštění sluneční soustavy

Když využijeme oběžné rychlosti Země 29.7 km s^{-1} tak stačí 42.1-29.7 = 12.4 km s^{-1}

Opakování - 3. Kepplerův zákon



1 AU = 149.6 × 10^6 km

$$v_P = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{b_0}{2M_Z} = konst.$$

$$Tv_P = \pi ab \Rightarrow Tb_0 = 2M_Z \pi ab$$

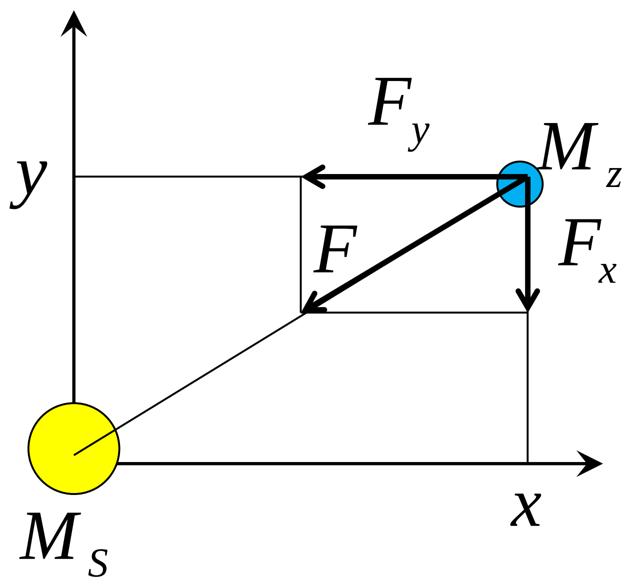
$$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos(\varphi - k)}$$

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{b_0^2}{\gamma M_Z} \Rightarrow b = b_0\sqrt{\frac{a}{\gamma M_Z}}$$

$$Tb_0 = 2M_Z \pi a b_0 \sqrt{\frac{a}{\gamma M_Z}}$$

$$\gamma = \kappa M_Z M_S \Rightarrow \boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\kappa M_S} = konst.}$$

Opakování - Keplerova úloha – trajektorie Země (planet)



$$\vec{F} = -\kappa \frac{M_Z M_S}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$M_Z \vec{a} = \vec{F}$$

pohybové rovnice:

$$a_x = \ddot{x} = -\kappa \frac{M_S}{r^3} x$$

$$a_y = \ddot{x} = -\kappa \frac{M_S}{r^3} y$$

počáteční podmínky:

$$v_x(0) = 0$$

$$v_y(0) = 6.166$$

$$x(0) = 1.0167$$

$$y(0) = 0$$

jednotky:

hmotnost: $M_Z = 5.97 \times 10^{24}$ kg

čas: 1 rok = 3.1536×10^7 s

vzdálenost: 1 AU = 149.6×10^6 km

gravitační konstanta:

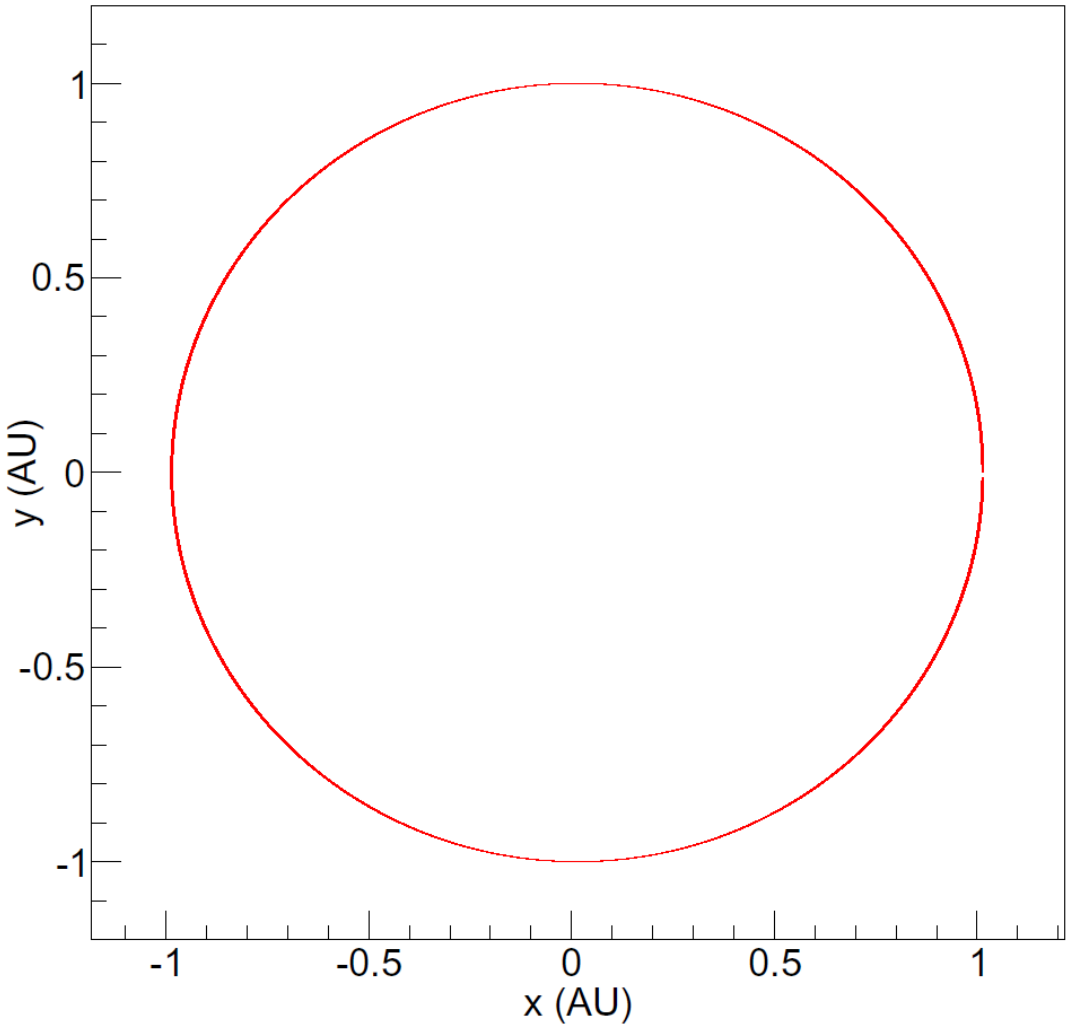
$\kappa = 1.18 \times 10^{-4}\ M_Z^{-1} AU^3\ rok^{-2}$

hmotnost Slunce:

$M_S = 1.99 \times 10^{30}$ kg $= 3.33 \times 10^5\ M_Z$

Opakování - Keplerova úloha

trajektorie Země



maximální vzdálenost od Slunce (afélium): 1.0167 AU

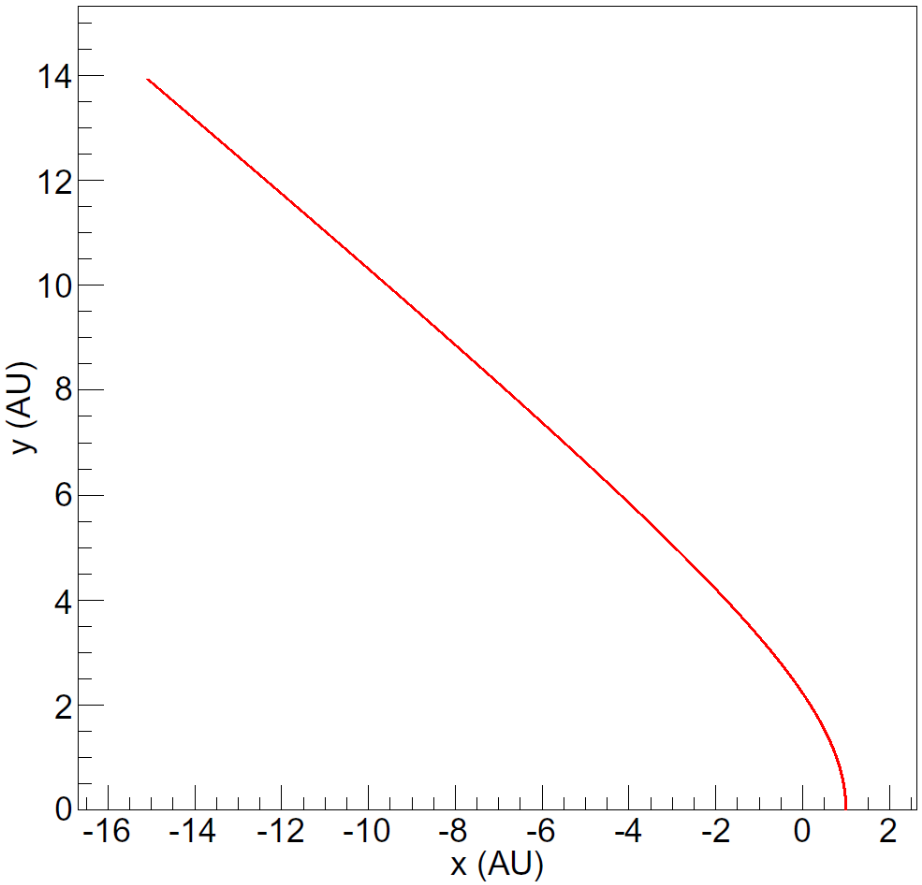
minimální vzdálenost od Slunce (perihelium): 0.9833 AU

numerická excentricita: 0.0167

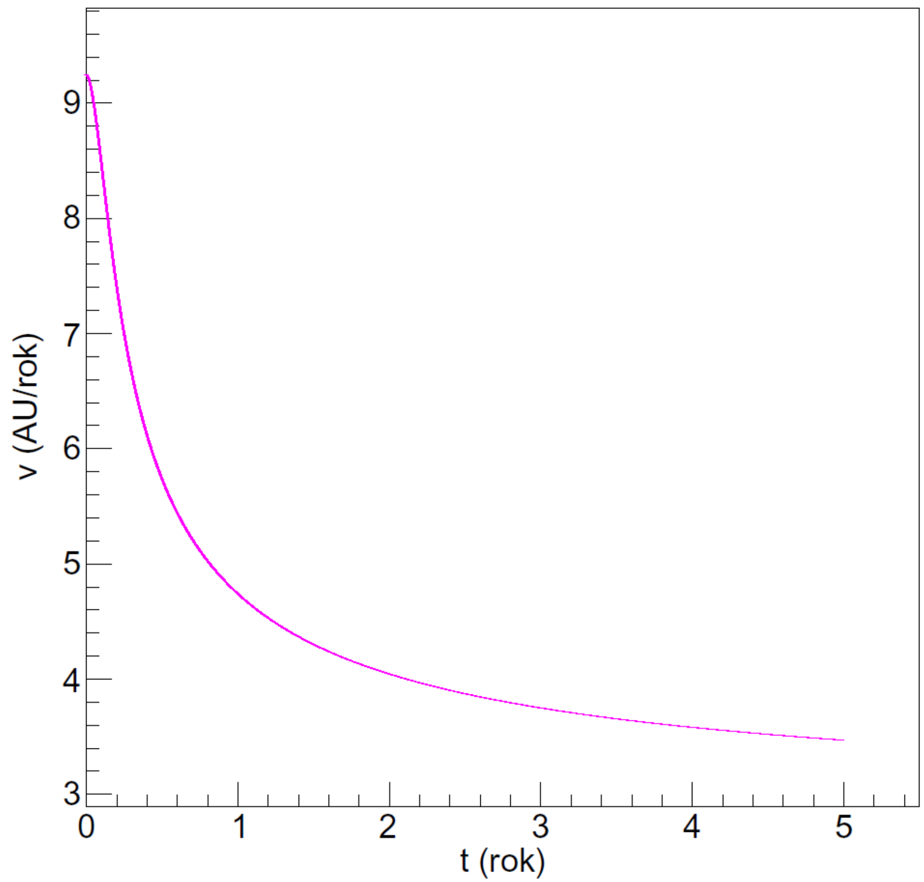
Opakování - Keplerova úloha

kdybysme zvýšili rychlost Země o 50%: $v_y(0)$ 6.166 AU/rok $\rightarrow$ 9.249 AU/rok

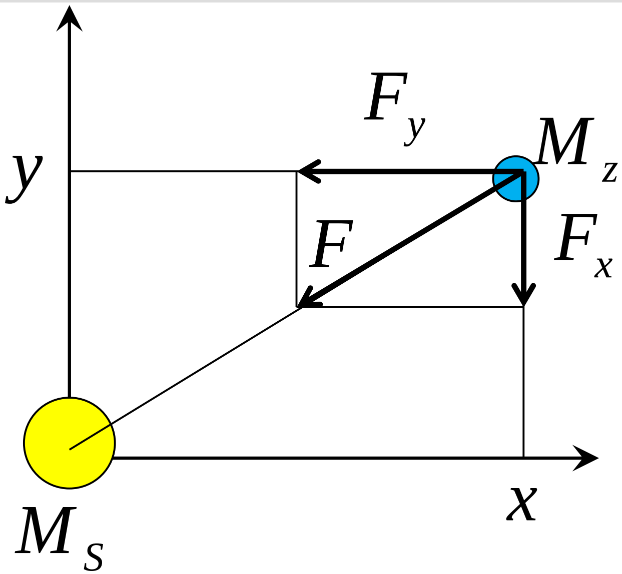
trajektorie



rychlost



Opakování - Keplerova úloha – trajektorie Země (planet)



$$\vec{F} = -\kappa \frac{M_Z M_S}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Mnoho planet kolem slunce:

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$$

$$M_i \ddot{x} = \sum_{j=1}^{N} -\kappa \frac{M_i M_j}{r_{ij}^3} (x_i - x_j)$$

$$M_i \ddot{y} = \sum_{j=1}^{N} -\kappa \frac{M_i M_j}{r_{ij}^3} (y_i - y_j)$$

$$M_i \ddot{z} = \sum_{j=1}^{N} -\kappa \frac{M_i M_j}{r_{ij}^3} (z_i - z_j)$$

pohybové rovnice:

$$a_x = \ddot{x} = -\kappa \frac{M_S}{r^3} x$$

$$a_y = \ddot{x} = -\kappa \frac{M_S}{r^3} y$$